Prof. Dr. C. W. Cryer WS 95/96

Mathematik des Herz-Kreislaufsystems

Aufgabe 1
Verifizieren Sie, daß die Funktion

$$x(t) = \frac{mg}{K}(1 - \cos\omega t) + \frac{V}{\omega}\sin\omega t,$$

mit $\omega = \sqrt{K/m}$, tatsächlich das AWP

$$m\ddot{x} = mg - Kx \ , \ x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = V$$

löst.

Aufgabe 2
Berechnen Sie den Energiebedarf in kcal einer Person der Masse 70 kg zur Erklimmung eines 2000 m hohen Berges, bei einer "Energie-Verwertungsrate" von 30%. (D. h. nur 30% der durch die Nahrung aufgenommenen Energie wird in kinetische Energie umgewandelt, der Rest wird in Form von Wärme etc. abgegeben.)

Aufgabe 3
Es sei durch $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein starrer, homogener Körper der Masse m gegeben. Für sein Massenträgheitsmoment bezüglich einer Rotationsachse S gilt die Formel

$$I_S = \frac{m}{|\Omega|}\int_\Omega dist(x,S)^2 dx$$

wobei $dist(x,S)$ den Abstand von $x \in \Omega$ zu S angibt.

1. Berechnen Sie I_S für einen dünnen Stab der Länge l, wobei die Rotationsachse senkrecht zum Stab steht (in der Zeichnung senkrecht auf dem Blatt; siehe Abb. 1).

   Zeigen Sie, daß $I_S = I_{S_0} + ma^2$, wobei S_0 die Achse durch den Schwerpunkt des Stabes und a den Abstand von S_0 nach S bezeichnen.

2. Berechnen Sie I_S für den Fall einer dünnen Kreisscheibe mit Radius l, wobei die Rotationsachse senkrecht zur Kreisscheibe durch ihren Mittelpunkt geht (Abb. 1)

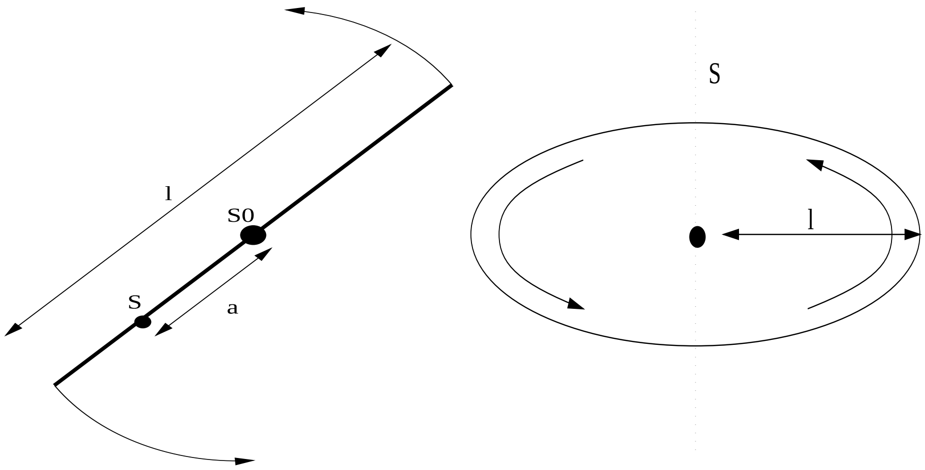


Abbildung 1: Aufgabe 3

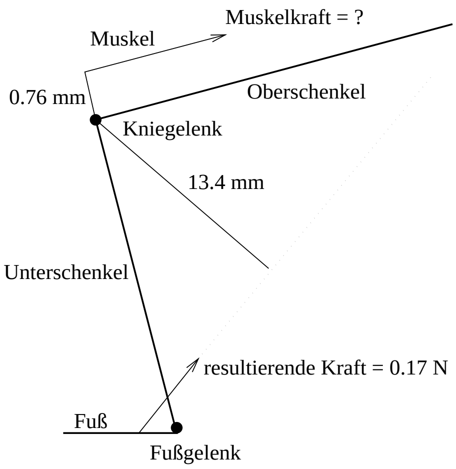


Abbildung 2: Aufgabe 4

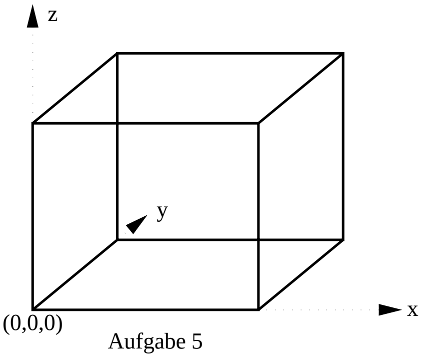
Aufgabe 4

In Abbildung 2 ist die schematische Darstellung eines Heuschreckenbeins während der Sprungphase gegeben. Beobachtungen ergaben eine resultierende Kraft vom Betrag 0.17 N. Berechnen Sie den Betrag der Kraft, die dazu vom Oberschenkelmuskel ausgeübt werden muß. Vernachlässigen Sie dabei die Masse des Unterschenkels.

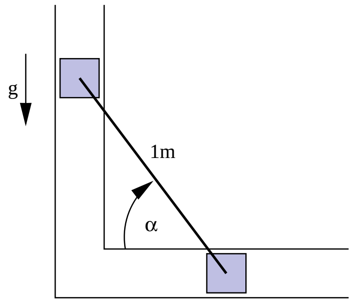
Aufgabe 5

1. Geben Sie den Massenträgheitstensor eines starren Einheitswürfels der Masse m mit homogener Massenverteilung an, dessen eine Ecke im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegt.

2. Geben Sie die Hauptachsen des Würfels an, und berechnen Sie die kinetische Energie der Rotation des Würfels mit der Winkelgeschwindigkeit ω um jede seiner Hauptachsen.



Aufgabe 5



Aufgabe 6

Aufgabe 6
Zwei Klötze gleicher Masse m, die mittels Schanieren durch eine starre Stange der Länge 1 m verbunden sind, bewegen sich reibungsfrei entlang eines vorgegebenen Weges (vgl. Zeichnung). Die Erdanziehung wirkt in Richtung der negativen y-Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Geschwindigkeit der Blöcke $= 0$.

1. Geben Sie die kinetische und potentielle Energie (T und V) als Funktionen von α an.

2. Leiten Sie für die Lagrangefunktion $L = T - V$ mit Hilfe der Lagrangegleichung
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$
eine DGL der Form $\dot{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$ her.

Aufgabe 7
Überprüfen Sie die Gleichungen (B.1) bis (B.7) in der Arbeit: "Dynamic Models for Sideways Falls From Standing Height" von Kroonenberg, Hayes, and McMahon; J. Biomechanical Engineering, Vol. 117, 1995 S. 309 - 318.

Bemerkung: Entgegen der Definition von κ auf Seite 312, linke Spalte, Zeile -6, ist κ der Winkel zwischen dem Rumpf ("Trunk") und der $yz-$Ebene.

Aufgabe 8
Gemeinsame Aufgabe, die am **Montag, 27.11.95** abgeschlossen sein sollte:
Überprüfen Sie die Ergebnisse in der ersten Zeile in Tafel 3 (3A: no springs) in der Arbeit von Kroonenberg, Hayes, and McMahon.

Aufgabe 9
Das linke Ventrikel eines Hundeherzens (siehe Bild auf der Rückseite) wird durch Ellip-

soiden approximiert:

$$\begin{aligned} x_1 &= C\sinh(\xi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ x_2 &= C\sinh(\xi)\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x_3 &= C\cosh(\xi)\cos(\theta) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C &= 43,0mm \\ \xi &= 0,37 \quad \text{(innere Wand = Endocardium)} \\ \xi &= 0,68 \quad \text{(äußere Wand = Epicardium)}, \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ \arccos\left[\frac{h}{C\cosh(\xi)}\right] \leq \theta \leq \pi, \\ h = 24,8mm. \end{gathered}$$

Berechnen Sie:

1. Das Volumen der Herzwand,
2. den Schwerpunkt der Herzwand und
3. die Hauptträgheitsmomente I_1, I_2 und I_3 der Herzwand bzgl. des Ursprungs $O = (0,0,0)$. (Dichte $\rho := 1$).

Aufgabe 10

Die Körperoberfläche A eines Hundes ist im allgemeinen nicht leicht zu bestimmen. Man versucht daher einen Ansatz, A in Relation zu einfacher zu messenden Größen, wie zum Beispiel Körperlänge L und Volumen V, zu setzen:

$$A = K_1 L^2, \quad A = K_2 V^{2/3}.$$

Leider ist dieser Ansatz nur für "mittlere" Hunde sinnvoll; für besonders dicke Hunde wird etwa die erste Formel eine zu kleine Fläche liefern. Man versucht daher, beide Formeln mittels

$$A = K\ L^a (V^{1/3})^b, \tag{1}$$

- wobei K, a und b noch zu bestimmen sind - miteinander zu kombinieren.

1. Bestimmen Sie b in Abhängigkeit von a derart, daß (1) dimensional korrekt ist.
2. Bestimmen Sie ein vollständiges System $\{\pi_1, \pi_2\}$ dimensionsloser Größen derart, daß sich (1) in der Form $\pi_1 = K\pi_2^a$ schreiben läßt.

3. Messungen an sieben Hunden ergaben die folgenden Werte:

Hund Nr.	1	2	3	4	5	6	7
$L(cm)$	74	98	103	51	100	62	76
$V(cm^3)$	5450	17250	32640	3390	25930	5350	10150
$A(cm^2)$	3815	8104	10763	2320	9106	3284	5070

Bestimmen Sie daraus mit der Methode der kleinsten Quadrate K und a.

Aufgabe 11

Gesucht wird eine einfache Formel für die Bewegung von Festlandbewohnern in Abhängigkeit von den Größen l (Beinlänge), s (Spurlänge = Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Fußabdrücken), u (horizontale Geschwindigkeit) und g (Erdbeschleunigung).

1. Zeigen Sie, daß $\pi_1 = s/l$ und $\pi_2 = u^2/gl$ unabhängige dimensionslose Größen sind.

2. Ähnlich wie in Aufgabe 10 wurde aus Meßwerten diverser Tierarten eine Abhängkeit $\pi_1 = K\pi_2^a$ mit $K = 2.3$, $a = 0.3$, ermittelt. Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeiten eines Dinosauriers mit Beinlänge $3m$ und Spurlänge $2,5m$.

Aufgabe 12

Es soll das Pi-Theorem in mehreren Schritten bewiesen werden:
Es seien $u, W_1, \dots, W_n$ Variablen, die einer dimensional korrekten Gleichung

$$u = f(W_1, \dots, W_n) \tag{2}$$

genügen, $L_1, \dots, L_m$ Basisgrößen. Die Dimensionen der Variablen lassen sich als Produkte von Potenzen der Basisgrößen darstellen:

$$[u] = L_1^{a_1} \cdots L_m^{a_m}, \quad [W_i] = L_1^{b_{1i}} \cdots L_m^{b_{mi}}; \qquad i = 1 \dots n.$$

Eine Variable Z ist also dimensionslos, wenn $[Z] = 1$. Weiter sei $B = B(W_1, \dots, W_n) = (b_{ji}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\quad a = a(u) = (a_j) \in \mathbb{R}^m$. Die Aussage des Theorems lautet:

1. (2) ist transformierbar auf eine Gleichung der Form

   $$\pi = g(\pi_1, \dots, \pi_k)$$

   mit dimensionslosen Größen $\pi, \pi_1, \dots, \pi_k$. Diese lassen sich darstellen durch $k+1$ Vektoren $y, x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ mittels

   $$\pi = uW_1^{y_1} \cdots W_n^{y_n}, \quad \pi_i = W_1^{x_1^{(i)}} \cdots W_n^{x_n^{(i)}}, \quad i = 1 \dots k$$

   wobei die $x^{(i)}$ linear unabhängig sind. Insbesondere gilt also $u = W_1^{-y_1} \cdots W_n^{-y_n} g(\pi_1, \dots, \pi_k)$.

2. Genauer gilt: $k = n - rang(B)$, $Bx^{(i)} = 0$, $i = 1 \ldots k$, $By = -a$. Umgekehrt läßt sich aus jeder Basis $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ von Kern(B) und jedem y mit $By = -a$ ein unabhängiges System dimensionsloser Größen wie in 1. konstruieren.

Gehen Sie zum Beweis wie folgt vor:

1. Es sei $\epsilon \in \mathbb{R}$,

$$u^* = e^{\epsilon a_1} u, \quad W_i^* = e^{\epsilon b_{1i}} W_i,$$

   dann ist (2) äquivalent zu

$$u^* = f(W_1^*, \ldots, W_n^*).$$

2. Folgern Sie, daß ohne Einschränkung $b_{11} \neq 0$ gilt.

3. Zeigen Sie mit Hilfe von 1., daß die skalierten Variablen

$$\overline{u} = u W_1^{-a_1/b_{11}} \ , \ \overline{W}_{i-1} = W_i W_1^{-b_{1i}/b_{11}} \ , \ i = 2 \ldots n \ , \ \overline{W}_n = W_1$$

   einer Gleichung der Form

$$\overline{u} = \overline{f}(\overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_{n-1}) \quad \text{genügen}$$

   und dimensionslos bezüglich L_1 sind.

4. Folgern Sie durch wiederholte Anwendung von 1. - 3. den ersten Teil der Aussage.

5. Zeigen Sie schließlich den zweiten Teil.

Aufgabe 13
Margaria (1975) benutzt folgendes hydraulisches Modell zur Beschreibung des Energiehaushaltes im menschlichen Körper bei sportlicher Betätigung: Drei Behälter O (Sauerstoff), P (Phosphagen) und L (Laktat) sind miteinander durch Rohre (R_1, R_2, R_3) verbunden. Ein Hahn reguliert die Geschwindigkeit der Energiezufuhr entsprechend des Bedarfs. Die Kapazität von O wird als unendlich angenommen.
Zu Beginn der Übung (der Hahn ist noch geschlossen) sind alle Behälter bis zum oberen Rand gefüllt. Bei einer leichten Übung (Hahn ist halb geöffnet) fällt der Pegel in P; dadurch wird ein Sauerstoffzufluß durch R_1 verursacht. Ist die Energierate nicht zu hoch, bleibt der Pegel schließlich konstant, und die Übung könnte theoretisch unbegrenzt fortgeführt werden. Wird die Übung nun beendet (Hahn wird geschlossen), füllt sich P durch R_1 wieder auf.

Bei einer sehr anstrengenden Übung (Hahn ist ganz geöffnet) fällt der Pegel in P unterhalb des Pegels in L, und der Fluß durch R_1 ist nun maximal. Laktatbildung durch R_2 entsprechend des Pegelunterschieds $h-1-\ell$ setzt ein. Wird die Übung fortgesetzt, ist P bald leer; der Sportler ist erschöpft. Bei Aussetzung der Übung wird P wieder aufgefüllt, durch R_1 bei zunächst maximaler Flußrate, und durch R_2, bis $h-1-\ell=0$. Dann wird P nur durch R_1 aufgefüllt und L sehr langsam durch R_3.

Morton (1985) beschreibt das Modell durch gewöhnliche Differentialgleichung für den Fall, daß der Pegel in P sich schon unterhalb R_1 befindet.

Zunächst ist die Energierate proportional zur Summe der Flüsse aus den drei Behältern:

$$\beta M = \dot{V}_O + \dot{V}_P + \dot{V}_L$$

wobei $M =$ Energierate (Nm/sec), $V =$ Volumen (m^3), $\dot{V} =$ Änderungsrate von $V(m^3/sec)$, $\beta =$ Konversionsfaktor zwischen M und $\dot{V}(m^2/N)$, $\dot{V}_O = \dot{V}_{O\,max} =$ konstant. Weiter gilt:

$$\dot{V}_P = A_P \frac{dh}{dt}, \quad \dot{V}_L = A_L \frac{d\ell}{dt},$$

wobei A_P, A_L die Schnittflächen der Behälter sind. Außerdem ist $\dot{V}_L$ proportional zur Differenz der Pegel in P und L:

$$\dot{V}_L = \dot{M}_L(h-1-\ell),$$

$\dot{M}_L$ eine Konstante, welche die maximale Rate der Laktatproduktion beschreibt.

1. Leiten Sie zunächst folgende Differentialgleichungen für ℓ und h her:

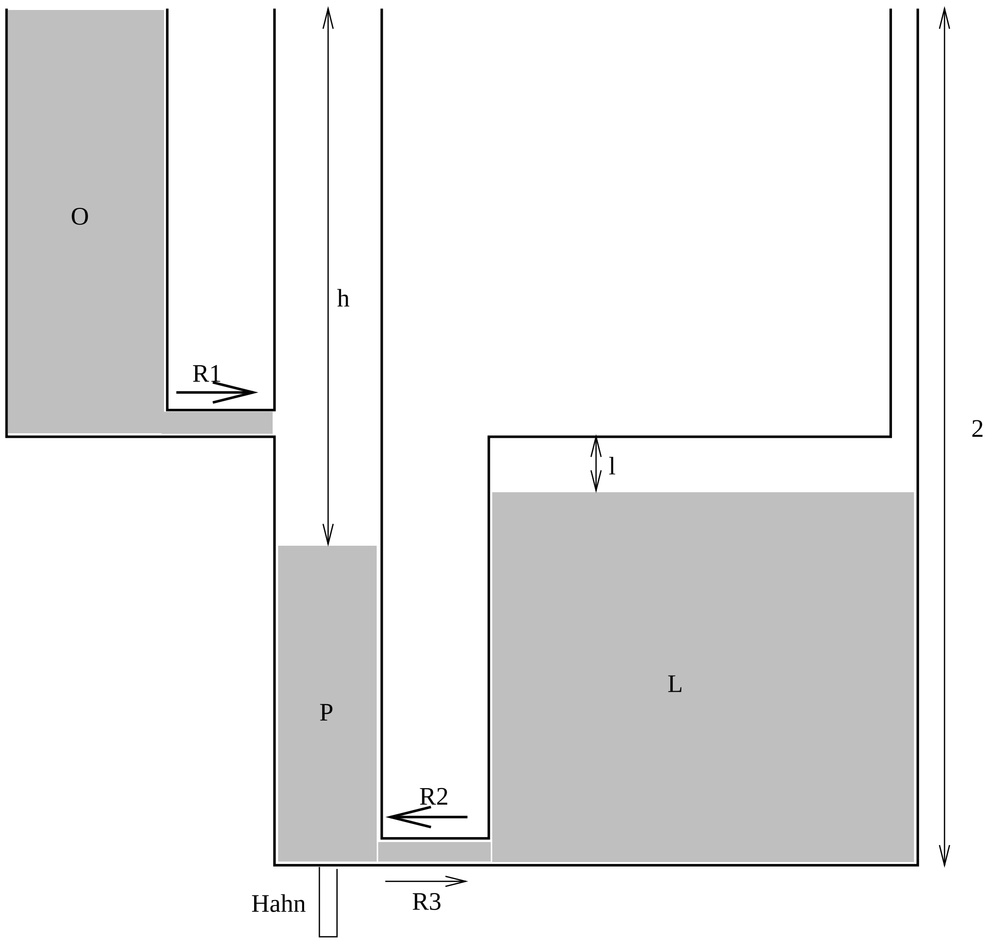
$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_L}{\dot{M}_L}\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{d\ell}{dt},$$

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\dot{M}_L(A_P + A_L)}{A_P A_L}\frac{d\ell}{dt} - \frac{\dot{M}_L(\beta M - \dot{V}_O)}{A_P A_L} = 0$$

2. Es soll versucht werden, die Sauerstoffverbrauchsrate in Abhängigkeit von der Zeit eines 70 kg schweren Sportlers zu bestimmen, der zunächst für eine Dauer von 95 sec mit einer konstanten Rate βM von $2\dot{V}_{O\,max}$ belastet wird und sich anschließend für 80 sec erholt.

   Margaria gibt für diesen Fall die folgenden Parameter an:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{O\,max} &= 46.67\ ml/s \\ A_P &= 823.2\ cm^2, \quad A_L = 3780.0\ cm^2 \\ \dot{M}_L &= 95.67\ ml/s \end{aligned}$$


O
R1
h
2
l
P
L
R2
Hahn
R3

Aufgabe 14
Es sei durch $\{(x_i, t_j)\}$ mit $x_i = ih, i \in \mathbb{Z}, t_j = jk, j \in \mathbb{N}$ ein Raum-Zeit-Gitter gegeben, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), g_i := g(x_i)$. $p_{i,j}^\ell$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, daß ein Partikel, welches sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei x_ℓ befindet, nach j Zeitschritten bei x_i ankommt, wobei in jedem Zeitschritt Bewegungen des Partikels um eine Ortseinheit nach links oder rechts dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben. Sei nun

$$h_{i,j} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_{i,j}^\ell g_\ell.$$

Zeigen Sie, daß obige Summe endlich ist, und daß $h_{i,j}$ die Lösung des klassischen expliziten Differenzenschemas für die Wärmeleitungsgleichung mit $\lambda = k/h^2 = \frac{1}{2}$ und $h_{i,0} = g_i$ ist.

Aufgabe 15
Betrachten Sie das RWP

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \ , \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega$$

für das Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Wie üblich wird Ω durch ein Gitter Ω_h diskretisiert, die Randpunkte werden mit $\Gamma_h \subset \Omega_h$ bezeichnet. Eine numerische Lösung u_h kann auf eine sehr einfache (wenn auch langsame) Art folgendermaßen bestimmt werden: Eine Zufallsgröße $F : \Omega_h \backslash \Gamma_h \to \Omega_h$ ordne einem gegebenen inneren Gitterpunkt $P = (i,j)$ einen seiner Nachbarpunkte $(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)$ "zufällig" zu, die Wahrscheinlichkeit soll jeweils bei 1/4 liegen. Auf diese Weise kann man jedem $P \in \Omega_h$ einen Randpunkt $Q \in \Gamma_h$ zuordnen:

> **function** $Q(P \in \Omega_h)\{$
>   **while** $(P \notin \Gamma_h)$ $P := F(P)$;
>   **return** (P);
> $\}$

Es wird also ein "zufälliger" Weg von P zum Rand Γ_h gewählt und der dortige Randpunkt Q zurückgegeben. Sei nun zu $P \in \Omega_h$ und $Q \in \Gamma_h$ $p(P,Q)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Weg von P zum Rand gerade nach Q führt. Es gilt: $0 \leq p(P,Q) \leq 1$ und $\sum_{Q \in \Gamma_h} p(P,Q) = 1$. $u_h(P)$ wird nun definiert als

$$u_h(P) := \sum_{Q \in \Gamma_h} p(P,Q) g(Q) \ .$$

1. Zeigen Sie, daß u_h die Fünfpunkteformel erfüllt.

2. Für $n > 0$ sei

$$u_h^{(n)}(P) := \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} g(Q(P)) \ .$$

Benutzen Sie die Konvergenz $u_h^{(n)}(P) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u_h(P)$, um das RWP mit $u(x,y) = x^2 - y^2$ numerisch für $N = 10, h = 1/(N+1)$, zu lösen. Bestimmen Sie die asymptotische Fehlerkonstante und die Konvergenzordnung des Verfahrens.

Aufgabe 16
Transformieren Sie die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG)

$$\begin{aligned} \rho\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla_x u\rangle\right) - \mu\Delta_x u + \nabla_x p &= f, \\ \mathrm{div}_x u &= 0, \end{aligned}$$

mittels der Skalierungen $u = U_*\overline{u}, p = P_*\overline{p}, x = L_*\overline{x}, t = T_*\overline{t}, f = F_*\overline{f}, U_* = L_*/T_*, F_* = \rho U_*/T_*$, $P_* = U_*^2\rho$, auf ein System dimensionsloser Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \langle \overline{u}, \nabla_{\overline{x}}\overline{u}\rangle - \nu\Delta_{\overline{x}}\overline{u} + \nabla_{\overline{x}}\overline{p} &= \overline{f}, \\ \mathrm{div}_{\overline{x}}\overline{u} &= 0, \end{aligned}$$

mit $\nu^{-1} = \frac{\rho}{\mu}L_*U_*$. Dabei ist $x \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor, $t \in \mathbb{R}$ die Zeit, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ der Geschwindigkeitsvektor, $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ der Druck, $\rho \in \mathbb{R}$ die Dichte, $f \in \mathbb{R}^3$ die äußere Kraft pro Volumeneinheit. L_* und T_* sind Referenz-Länge und Zeit, die üblicherweise entsprechend dem Problem festgelegt werden.

Aufgabe 17

1. Vereinfachen Sie die NSG

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla u\rangle - \nu\Delta u + \nabla p = 0$$

für den Fall, daß nur die erste Komponente von u nicht verschwindet und diese außerdem nur von x_2 und x_3 abhängt.

2. Schreiben Sie die vereinfachte NSG in Zylinderkoordination $x_1 = x_1, x_2 = r\cos\varphi, x_3 = r\sin\varphi$. Berechnen Sie damit die Flußgeschwindigkeit in einem zylindrischen Rohr unter der Annahme, daß diese am Rand verschwindet und nur von r abhängt.

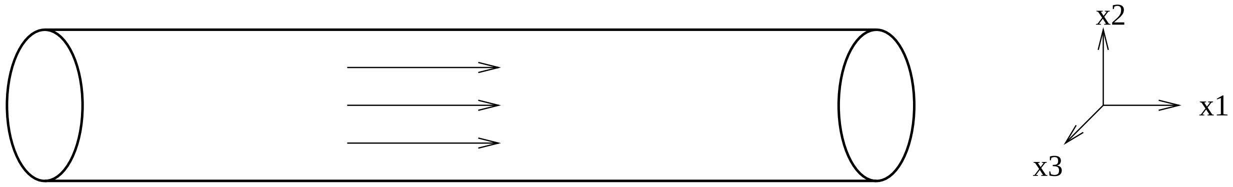


Abbildung 3: Aufgabe 17.

Aufgabe 18
Blutgefäße könnten wie in Abb. 4 verzweigen. Die einzelnen Teile L_0, L_1, L_2 seien Zylinder mit Radien $a_0 = 1, a_1 = a_2$. Die Verzweigung sei symmetrisch mit einem Winkel θ. Die Endpunkte A, B, D seien fixiert. Leiten Sie ähnlich wie in der Vorlesung a_1 in Abhängigkeit von θ mit der Maßgabe her, daß die Oberfläche der Blutgefäße minimal sein soll.

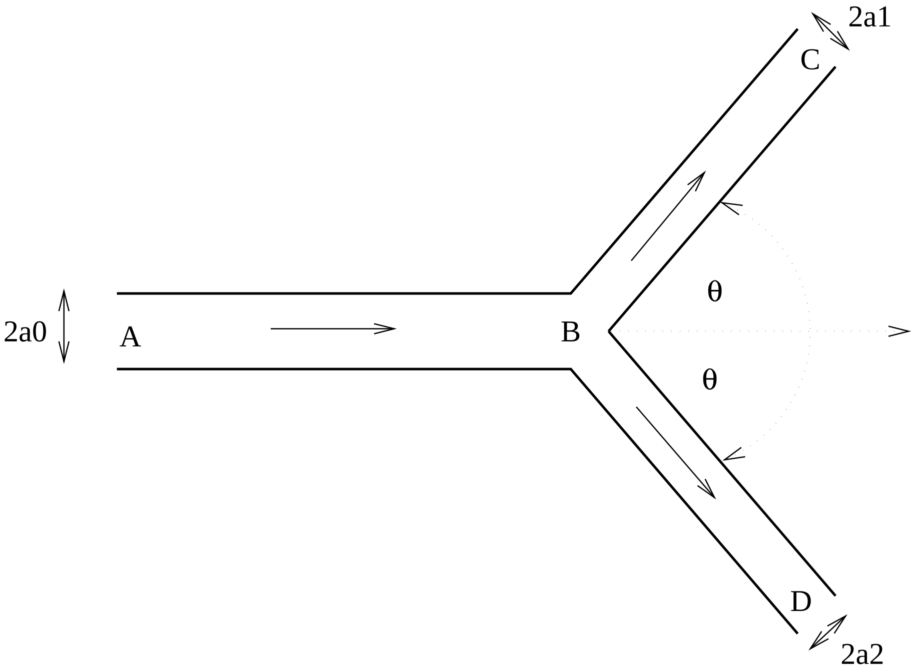


Abbildung 4: Aufgabe 18.

Aufgabe 19
Betrachten Sie Aufgabe 17 für den nichtstationären Fall, d. h. die nichtverschwindende erste Komponente von u hängt außer von x_2 und x_3 noch von t ab.

1. Vereinfachen Sie die Navier-Stokes-Gleichung für diesen Fall.

2. Sei R der Radius des Rohres $y = r/R, \alpha^2 = R^2 n/\nu$. Machen Sie den Ansatz

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ae^{int}, \ u = ve^{int}, \quad A \in \mathbb{C},$$

und folgern Sie, daß v der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dv}{dy} - i\alpha^2 v = -\frac{AR^2}{\nu} \tag{3}$$

genügt. (Zur Vereinfachung der Notation wurde x_1 durch x und u_1 durch u ersetzt.)

3. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$ derart, daß durch die Skalierung $y = cz$ die zu (3) gehörende homogene Differentialgleichung in die Bessel-Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} + v = 0$$

transformierbar ist.

4. Plotten Sie die Fundamental-Lösungen der Bessel-DGL (siehe z. B. Walter, "Gewöhnliche Differentialgleichungen"). Konstruieren Sie mit diesen Lösungen die Lösung von (3) zu den entsprechenden Randbedingungen.

5. Plotten Sie mit den bisherigen Ergebnissen und Informationen eine (nichttriviale) reelle Lösung der nichtstationären Navier-Stokes-Gleichung. (Hierzu wird Mathematica empfohlen.)

Aufgabe 20

Ein vertikaler, elastischer Stab der Länge L (siehe Abb. a) ist an seinem unteren Ende fixiert. Er erfährt von oben eine vertikale Kraft F. Ab einer gewissen Kraft F_0 findet plötzlich eine Biegung des Stabes statt, wobei die vertikale Auslenkung Δx vernachlässigbar klein ist. (s. Abb. b)
Es sei w die horizontale Auslenkung des gebogenen Stabes.

1. Benutzen Sie die Beziehung

$$C\frac{d^2w}{dx^2} + Fw = 0,$$

wobei C eine geeignet dimensionierte Elastizitätskonstante ist, zur Berechnung von F_0. (Setzen Sie dabei zur Vereinfachung der Rechnung $C = 1$.)

2. Berechnen Sie F_0 für den Fall, daß der Stab zusätzlich in seinem Schwerpunkt fixiert wird. (siehe Abb. c)

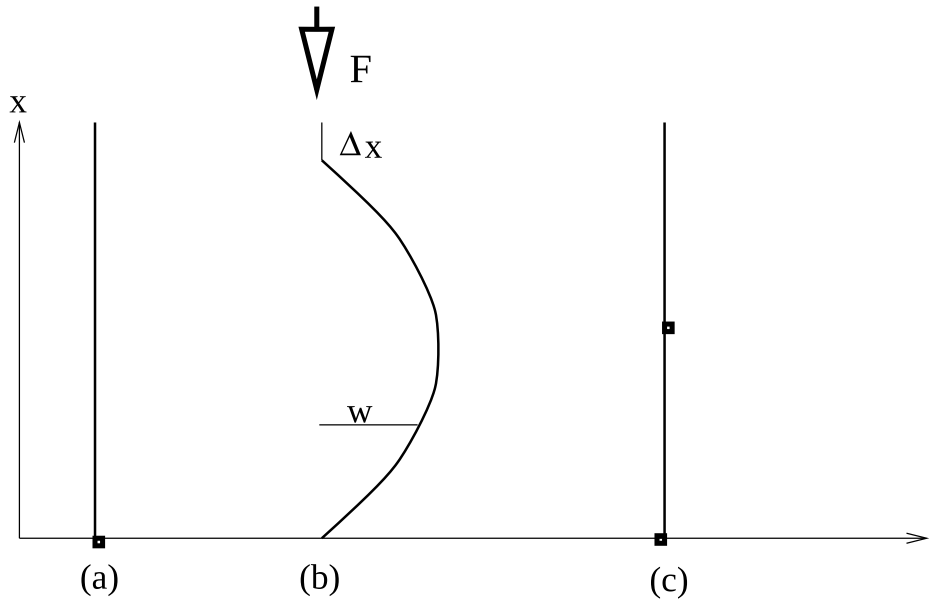
Aufgabe 21

Die Deformation eines Zylinders mit Umfang 2π, auf den ein gleichmäßiger äußerer Druck p wirkt, wurde durch eine DGL

$$k'' + \frac{1}{2}k^3 - ck - p = 0 \qquad (4)$$

beschrieben. $k(s)$ ist die Krümmung der Außenhaut, $0 \leq s \leq 2\pi$ und c eine Konstante.

1. Gesucht werden Lösungen $k(s)$ der Periode $2\pi/n, n = 1, 2, \dots$, mit
$k(s) = k(2\pi/n - s$, $0 \leq s \leq 2\pi/n$. Leiten Sie daraus sinnvolle Randbedingungen für (4) auf dem Intervall $[0, \pi/n]$ her.



2. Machen Sie den Ansatz $k = 1 + u, \|u\| \ll 1$, und leiten Sie eine neue DGL für u her. Berechnen Sie für den Fall $n = 2$ näherungsweise Lösungen von (4) gemäß Teil 1., indem Sie in der DGL für u die Terme der Ordnungen $O(u^2)$ und $O(u^3)$ vernachlässigen. Geben Sie für diese Näherungslösungen auch p an.

Aufgabe 22

Es seien $\{x^a\}$ und $\{X^A\}$ zylindrische Koordinatensysteme des $\mathbb{R}^3$, also

$$\begin{array}{rclrclrcl} x^1 &=& r, & x^2 &=& \theta, & x^3 &=& z, \\ X^1 &=& R, & X^2 &=& \Theta, & X^3 &=& Z. \end{array}$$

Betrachten Sie für $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3$ eine gleichförmige Drehung im entgegengesetzten Uhrzeigersinn um die Z-Achse

$$\phi_t^1(R,\Theta,Z) = R, \quad \phi_t^2(R,\Theta,Z) = \Theta + 2\pi t, \quad \phi_t^3(R,\Theta,Z) = Z,$$

mit $\phi_t^a = x^a \circ \phi_t$. Berechnen Sie V_t^a, v_t^a, A_t^a und a_t^a.

Aufgabe 23

Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 22. Gegeben sei weiter ein kartesisches Koordinatensystem $\{\overline{x}^a\}$ durch

$$\overline{x}^1 = x^1 \cos x^2, \quad \overline{x}^2 = x^1 \sin x^2, \quad \overline{x}^3 = x^3.$$

Berechnen Sie $\overline{V}_t^a, \overline{v}_t^a, \overline{A}_t^a$ und $\overline{a}_t^a$ durch die Koordinatentransformations-Formeln aus der Vorlesung und durch direktes Differenzieren von $\overline{\phi}_t^a$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 24
Es seien $v \in \mathcal{C}^1$ und $w \in \mathcal{C}^0$ Vektorfelder des $\mathbb{R}^3$. Die *kovariante Ableitung von* v *längs* w ist definiert als

$$\nabla_w v(x) := Dv(x) \cdot w(x).$$

Zeigen Sie: In einem Koordinatensystem $\{x^a\}$ gilt

$$(\nabla_w v)^a = \frac{\partial v^a}{\partial x^b} w^b + \gamma^a_{bc} w^b v^c.$$

(γ^a_{bc} sind die Christoffelsymbole von $\{x^a\}$)